¿Qué son las funciones hiperbólicas? Son las gemelas de las trigonométricas, pero para hipérbolas.

En la circunferencia unitaria x² + y² = 1, la altura y de un punto es seno de t, y x es coseno de t. t es el ángulo con el eje x, que en radianes también es el largo del arco de circunferencia, y el doble del área de la sección circular.

En la HIPÉRBOLA unitaria, x² MENOS y² = 1, la altura y de un punto es seno HIPERBÓLICO de t, y x es COSENO HIPERBÓLICO de t. t es el “ángulo hiperbólico”, el doble del área de la sección hiperbólica.

Esto se usa en relatividad, pues el espacio-tiempo es hiperbólico, como explica Minute Physics en su “Curso de introducción a la Relatividad Especial”, que recomiendo un montón.

[VERSIÓN CORTA (se salta la deducción de las fórmulas del seno y coseno hiperbólico)]

Y eso no es todo: resulta que...

[VERSIÓN LARGA (explica el porqué de las fórmulas del seno y coseno hiperbólico)]

Pero, ¿qué es el ángulo hiperbólico y por qué es “el doble del área”? Verás, las áreas son muy importantes para las hipérbolas. Por ejemplo, y = 1 sobre x, que se puede reescribir como xy = 1: todos los puntos tales que su coordenada x por su altura, las cuales forman el área de este rectángulo, da siempre 1. O sea que, si duplico x, y tiene que reducirse a la mitad. Si triplico x, y se divide por 3. Si x lo multiplico por lambda, debo dividir y por lambda, para que el área del rectángulo sea siempre 1.

Esta transformación de multiplicar un eje y dividir el otro por un mismo lambda, se llama “rotación hiperbólica”. Al igual que una rotación normal, que mueve puntos a lo largo de circunferencias, preservando áreas, la rotación hiperbólica mueve punto a lo largo de hipérbolas, también preservando áreas.

Y donde hay rotaciones, hay ángulos. ¿Cómo definimos un ángulo? Como las áreas son tan importantes, digamos que si tomo un punto y lo roto hasta barrer una sección de área 1, el ángulo es 1. Si parto en 1, y roto el punto hasta llevarlo a un x, obtengo esta sección. Si le sumo este triángulo, que es la mitad de un rectángulo de área 1, y le resto este otro triángulo que también lo es, el área de la sección es igual al área bajo la hipérbola entre 1 y x, que es el logaritmo natural de x, o sea el logaritmo en base e, y un logaritmo evaluado en su misma base, en este caso el número e, es igual a 1. Así que si tomo el punto (1, 1) y lo roto hasta (e, 1 sobre e), el área de la sección es 1. Así que una rotación hiperbólica en un ángulo 1 es multiplicar un eje y dividir el otro por el número e. Para rotar en un ángulo 2 debo rotar dos veces en un ángulo 1, o sea multiplicar y dividir por e, dos veces, o e². Y para rotar en un ángulo t, debo usar e^t.

Y esto aplica para todas las hipérbolas, como x² - y² = 1, aunque esta es una copia de la hipérbola anterior con las áreas reducidas a la mitad, así que el área de la sección de ángulo 1 es 1/2, y el de una sección de ángulo t es t/2, así que ahora t es el doble del área.

Los ejes los puedo expresar con los vectores u = 1/2(1, 1) y v = 1/2(1, -1), de manera que u + v me da el vértice de la hipérbola, (1, 0). Si multiplico u por e, y divido v por e, esa es una rotación de ángulo 1, que me lleva a este punto. Para rotar en un ángulo t, debo multiplicar u y dividir v por e^t, y sumarlos, obteniendo este punto. Si digo que las coordenadas x e y del punto son coseno y seno hiperbólico de t, entonces...

el coseno hiperbólico es e^t + e^-t partido en 2, y el seno hiperbólico es e^t - e^-t partido en 2.

Sumando ambas expresiones, nos da coseno más seno hiperbólico de t igual a e^t. Esto se parece a la fórmula de Euler, e^it = coseno más iseno de t. Si copias esta fórmula, reemplazas t por -t, y sumas y restas ambas, obtienes expresiones para el seno y coseno en función de exponenciales imaginarias, que se parecen mucho a las de las hiperbólicas, pero con exponentes imaginarios.

Si en la expresión del coseno reemplazas t por it, obtienes coseno hiperbólico de t igual a coseno de it. Y si haces lo mismo para el seno, y además multiplicas por i, obtienes que seno hiperbólico de t es i seno de it.

Por eso, a los ángulos hiperbólicos también se les llama “ángulos imaginarios”.